

### Пояснительная записка.

Данный элективный курс разработан в соответствии с :

- Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации";
- Порядком организации и осуществления образовательной деятельности по основным общеобразовательным программам – образовательным программам начального общего, основного общего и среднего общего образования, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 30.08.2013 № 1015;
- Федеральным компонентом государственного образовательного стандарта общего образования (ФКГОС), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 05 марта 2004 №1089;
- Учебным планом Школы;
- Программой элективных курсов в профильном обучении: Образовательная область «Математика»/Министерство образования РФ —Национальный фонд подготовки кадров. — М.: Вита-Пресс, 2004. — 96 с.;
- Методическими рекомендациями к элективному курсу С.А. Гомонова «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения» (М. Дрофа, 2005г.)
- Примерной программой среднего (полного) общего образования по математике (сост. Э.Д.Днепров, А.Г.Аркадьев.- М.: Дрофа, 2007г.

Элективный курс «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения» рассчитан на 68 часов (34 ч.- в 10-ом классе, 34 ч.- в 11-ом классе)) для учащихся 10—11 классов. Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов задач оптимизационного характера без применения средств дифференциального исчисления, а также (пусть и на интуитивном уровне) для ознакомления с некоторыми идеями такого раздела современной математики, как выпуклый анализ.

Целью данного курса является изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование (в той степени строгости, которая соответствует уровню школьной математики) методов их получения, а также выход на приложения изученного теоретического материала. Таковыми вначале будут решения примеров на установление истинности простейших числовых неравенств, встречающихся на вступительных экзаменах в вузы, а к завершению освоения курса — рассуждения, требующие уметь находить неравенства, помогающие справиться с данным конкретным заданием.

Данная цель курса реализуется посредством решения следующих задач:

- расширить знания учащихся по теме «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения»;
- формировать умение планировать свою деятельность;
- развить навыки анализа и самоанализа;

- содействовать формированию у учащихся математической грамотности;
- расширить представления о профессиональных областях человеческой деятельности.

Данная программа курса по выбору своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10—11 классов, которым интересна математика и ее приложения и которым захочется глубже и основательнее познакомиться с ее методами и идеями (или самостоятельно, или под руководством учителя математики). Предлагаемый курс освещает намеченные, но совершенно не проработанные в общем курсе школьной математики вопросы. Выбрав его, учащиеся за полгода пройдут путь от доказательства простейших числовых неравенств, встречающихся на вступительных экзаменах в вузы, до обоснования «замечательных» неравенств Коши—Буняковского, Чебышева и Иенсона. Стоит отметить, что навыки в использовании этих неравенств совершенно необходимы всякому ученику, желающему хорошо подготовиться и успешно выступить на математических конкурсах и олимпиадах самого высокого уровня.

### **Основные результаты освоения данного элективного курса.**

Общеучебные умения и навыки:

- сформированная мотивация учащихся к изучению математики;
- сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики;
- сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими нравственными ценностями и идеалами российского гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности (образовательной, учебно-исследовательской, проектной, коммуникативной, иной);
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии на основе понимания её ценностного содержания и возможностей реализации собственных жизненных планов.

### **Учащиеся должны знать:**

- понятие «больше», «меньше», «не больше», «не меньше» для действительных чисел и их свойства;
- основные методы сравнения двух чисел: «по определению», сравнение их отношений с единицей, сравнение их степеней, сравнение их с промежуточным числом, метод использования «замечательных неравенств»;

- основные методы установления истинности неравенств с переменными: метод анализа, метод синтеза, метод «от противного», метод использования тождеств, метод подстановки (введение новых переменных), метод оценивания (усиление и ослабления);
- схему применения метода математической индукции;
- неравенство Коши для произвольного числа переменных;
- соотношение Коши-Буняковского;
- средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое двух положительных чисел, их геометрическое интерпретация.

### **В результате изучения курса учащиеся должны уметь:**

- применять основные методы сравнения двух чисел;
- применять основные способы доказательства истинности неравенств с переменными;
- применять метод математической индукции для доказательства неравенств;
- применять неравенство Коши - Буняковского при  $n = 2$  и  $n = 3$ ;
- применять замечательные неравенства для нахождения наибольшего и наименьшего значений функций, решения несложных задач на оптимизацию.

Итак, данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей (прежде всего с физикой). Традиционные формы организации занятий, как лекция и семинар, безусловно, будут применяться, но на первое место выйдут такие организационные формы, как дискуссия, диспут, выступления с докладами (в частности, с отчетными докладами по результатам написания рефератов или выполнения индивидуального домашнего задания) или с содокладами, дополняющими лекционные выступления учителя или ученика. Возможны и разные формы индивидуальной или групповой деятельности учащихся, как «Допишем учебник», отчетные доклады («Эврика, или Вот что мы нашли!») по результатам «поисковой» работы на страницах книг и журналов, включая (по возможности) зарубежные, и сайтов в Интернете, тем более что целый ряд разделов курса, безусловно, позволяет выделить темы для индивидуальной и коллективной исследовательской работы учащихся.

## **Основное содержание курса**

### **ЧАСТЬ I. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА**

Введение. Предмет, изучению которого посвящен данный курс. Исторические сведения. Преемственная связь с базовым курсом школьной математики. Средние величины и неравенство Коши. О задачах школьных математических олимпиад.

**Глава 1.** Числовые неравенства и их свойства. Понятие положительного и отрицательного действительного числа, число нуль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше» для действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Понятия «меньше», «не больше» и «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства. Тема для дискуссии: «Легко ли определить знак числа или найти наибольшее из двух данных чисел, если числа заданы как значения некоторых числовых выражений?». Простейшие свойства числовых неравенств. Монотонность функций и числовые неравенства.

**Глава 2.** Основные методы установления истинности числовых неравенств. Сравнение двух чисел — значений числовых выражений «по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами (числом), метод введения вспомогательной функции, метод использования «замечательных» неравенств и некоторые другие. Примеры.

Тема для дискуссии: «Можно ли использовать вычислительную технику (микрокалькулятор) для сравнения значений числовых выражений? Ожидания и заблуждения».

**Глава 3.** Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применения. Краткое введение. О применении неравенств с параметрами и об умении подбирать, сочинять и обосновывать (а то и опровергать) неравенства с параметрами. Банк-хранилище замечательных неравенств наибольшей востребованности. Неравенство-следствие. Равносильные (эквивалентные) неравенства. Равносильные задачи на доказательство (установление) или опровержение неравенств. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод синтеза, метод усиления и ослабления, метод подстановки (метод введения новых переменных), метод использования тождеств, метод введения вспомогательных функций, метод уменьшения или увеличения числа переменных, метод понижения степеней выражений, образующих левую или правую части неравенства, метод интерпретаций или моделей (векторных, тригонометрических, физических). Примеры.

Тема для дискуссии: «Самое лучшее из решений. За и против». (Одно и то же неравенство может быть установлено несколькими способами. Какой из способов лучше и почему? Каждый из участников «защищает» «свой» способ решения задачи, критикует другие решения.)

**Глава 4.** Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.

Индукция вообще и в математике в частности. Система аксиом Дж. Пеано. Схема применения принципа (аксиомы) математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции. Примеры. Две теоремы о сравнении соответствующих членов двух последовательностей с помощью сравнения разности или отношения двух соседних членов одной последовательности с разностью или отношением двух членов другой последовательности. Примеры.

Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Исторический экскурс. Функциональное доказательство неравенства Коши. Примеры. Некоторые неравенства, эквивалентные неравенству Коши.

Тема для дискуссии и самостоятельной работы: «Какое из доказательств лучше и почему?». (Существуют десятки вариантов доказательства неравенства Коши, некоторые из них приведены в рекомендованной литературе; учащимся можно поручить разобрать самые яркие и интересные из них, чтобы потом провести дискуссию на указанную выше тему с учетом того, что «лучшее» можно понимать по-разному.)

**Глава 5.** Неравенство Коши—Буняковского и его применение к решению задач. Примеры. Геометрическая интерпретация неравенства Коши—Буняковского. Векторный вариант записи этого неравенства.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Как ввести понятие величины угла между векторами?».

**Глава 6.** Неравенства подсказывают методы их обоснования.

а) Метод Штурма. Примеры.

б) Использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенства.

в) Геометрические неравенства, устанавливающие соотношения между длинами сторон треугольника.

Дополнительным разделом как источником тренировочных задач для развития навыков преобразования выражений является раздел «Условные тождества».

Тема для обсуждения или дискуссии: «Многообразие метода подстановки».

**Часть II. Средние величины: их свойства и применение.**

**Введение.** «Средние» в средней школе. Многообразие средних величин.

## **Глава 7.** Средние степенные величины: соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.

Введение. Средние величины в школьном курсе математики, физики. Многообразиие «средних».

а) Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношение между ними в случае двух параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Сохранится ли соотношение между средними величинами (арифметическим, геометрическим, гармоническим и квадратическим), если позволить входящим в них параметрам принимать произвольные действительные значения?».

б) Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое, их существование и свойства.

в) Симметрические средние. Теорема Мюрхеда. Круговые неравенства и методы их доказательства.

г) Среднее арифметическое взвешенное и его свойства. Координаты центра масс конечной системы материальных точек.

д) Средние степенные и средние взвешенные степенные и их свойства. Примеры. Вывод неравенства Коши—Буняковского с помощью тождества Лагранжа.

## **Глава 8.** Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.

Введение. Исторический экскурс. П.Л.Чебышев и его научное наследие.

а) Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности. Одномонотонная последовательность как результат обобщения понятия монотонных последовательностей и обнаружения некоторой «симметричности» выражений, составляющих левую и правую части неравенства Чебышева.

б) Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши—Буняковского.

## **Глава 9.** Генераторы замечательных неравенств.

Перечисляются основные способы получения замечательных неравенств, причем как ранее уже изученные (идет повторение ранее пройденного), так и совершенно новые.

а) Свойства квадратичной функции — источник простейших неравенств.

Тема для обсуждения: «Три доказательства неравенства Коши—Буняковского. Сходства и различия».

б) Неравенство треугольника.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Варианты введения понятия расстояния между двумя точками».

в) Свойства одномонотонных последовательностей — источник замечательных неравенств:

1) Свойства двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей. Примеры. Свертка двух последовательностей.

2) Свойства одномонотонных последовательностей произвольной длины и их применение. Примеры.

3) Одномонотонность нескольких последовательностей, их свойства и применения. Примеры.

4) Обобщения. Итоги. Применения изученных понятий и их свойств к получению новых замечательных неравенств. Неравенства, обобщающие одновременно и неравенство Коши—Буняковского, и неравенство Чебышева.

г) Неравенство Иенсона. Введение. Историческая справка. Краткий обзор результатов. Выпуклый анализ — раздел современной математики.

1) Свойства центра масс конечной системы материальных точек.

2) Выпуклые фигуры и выпуклые функции. Надграфик и подграфик функции. Неравенство Иенсона и его доказательство. Простейшие примеры применения.

3) Выпуклость фигур и свойства центра масс конечной системы материальных точек.

4) Исследование функций на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа. Неравенство Коши—Гельдера и неравенство Минковского. Достаточные условия вогнутости и выпуклости функции, заданной на указанном промежутке, в терминах ее производных первого и второго порядка (две основные теоремы разной степени общности и «тонкости»). Примеры (таблица) функций, чья выпуклость или вогнутость устанавливается вышеуказанными теоремами. Конкретные виды неравенства Иенсона, порожденные функциями из таблицы. Неравенство Коши—Гельдера. Неравенство Минковского и другие примеры.

**Глава 10.** Применение неравенств. Задача Дидоны (упрощенный вариант) и другие задачи на оптимизацию. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

**Календарно- тематическое планирование.**

**10 класс**

№	Тема	10Б	
		Дата	
		План	Факт
<b>Часть I. Замечательные неравенства (16)</b>			
1	Числовые неравенства	05.09.18	
2	Числовые неравенства	12.09.18	
3	Числовые неравенства	19.09.18	
4	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	26.09.18	
5	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	03.10.18	
6	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными.	10.10.18	
7	Частные случаи неравенств Коши, их обоснование и применение.	17.10.18	
8	Частные случаи неравенств Коши, их обоснование и применение.	24.10.18	
9	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств.	07.11.18	
10	Неравенства Коши для произвольного числа переменных.	14.11.18	
11	Неравенства Коши для произвольного числа переменных.	21.11.18	
12	Неравенства Коши-Буняковского и его применение к решению задач.	28.11.18	
13	Неравенства Коши-Буняковского и его применение к решению задач.	05.12.18	
14	Неравенства Коши-Буняковского и его применение к решению задач.	12.12.18	
15	Неравенства подсказывают методы их обоснования.	19.12.18	
16	Неравенства подсказывают методы их обоснования.		
<b>Часть II. Средние величины: их свойства и применение (19)</b>			
17	Средние степенные величины, соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.	16.01.19	

18	Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух параметров.	23.01.19	
19	Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое.	30.01.19	
20	Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое.	06.02.19	
21	Симметрические средние. Круговые неравенства.	13.02.19	
22	Симметрические средние. Круговые неравенства.	20.02.19	
23	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства.	27.02.19	
24	Средние степенные и средние взвешенные степенные.	06.03.19	
25	Неравенство Чебышева. Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности;	13.03.19	
26	Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши-Буняковского	20.03.19	
27	Генераторы замечательных неравенств.	03.04.19	
28	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	10.04.19	
29	Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств.	17.04.19	
30	Неравенство Иенсона( выпуклые фигуры и выпуклые функции, свойства центра масс конечной системы материальных точек).	24.04.19	
31	Исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа.	08.05.19	
32	Неравенства Коши-Гельдера и Минковского.	15.05.19	
33	Применение неравенств. Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи на оптимизацию.	22.05.19	
34	Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств.	29.05.19	
ИТОГО: 34 часа			